



TITLE:

Sequential slippage test について

AUTHOR(S):

原, 恭彦

CITATION:

原, 恭彦. Sequential slippage test について. 数理解析研究所講究録
1989, 682: 142-145

ISSUE DATE:

1989-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101157>

RIGHT:

Sequential slippage test について

筑波大学 社会工学系 原 恭 彦

【1】Introduction. Robbins (1970) は, 信頼水準 $1 - \alpha$ で, 任意の標本数 n に対して真の母数 θ を同時に含む信頼領域の列 $\{R_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}_{n \geq m}$ を考えた. すなわち,

$$(1) \quad P_{\theta} \{ \theta \in R_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ for } \forall n \geq m \} \geq 1 - \alpha \quad \text{for } \forall \theta.$$

この $\{R_n\}_{n \geq m}$ を θ に対する信頼水準 $1 - \alpha$ の信頼列と呼ぶ.

$$(2) \quad P_{\theta} \{ \hat{\theta}_n \in R_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ for } \forall n \geq m \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta \} = 1 \quad \text{for } \forall \theta,$$

のとき, $\{R_n\}_{n \geq m}$ は consistent であるという. また,

$$(3) \quad P_{\theta} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(R_n(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 0 \} = 1 \quad \text{for } \forall \theta,$$

のとき, $\{R_n\}_{n \geq m}$ は degenerate in the limit であるという. ただし, $\rho(R)$ は R の直径とする.

$\{R_n\}_{n \geq m}$ が consistent かつ degenerate in the limit であるならば, 帰無仮説 $H: \theta = \theta_0$ に対する対立仮説 $K: \theta \neq \theta_0$ の $N = \inf \{ n \geq m \mid \theta_0 \notin R_n \}$ を stopping rule とする sequential test は, size α かつ power 1 であることが, Lai (1976) に述べられている. 多次元回帰モデルの回帰係数に対する信頼列の構成については, Sinha and Sarkar (1984) や Hara (1986) がある.

さて, X_{ij} は互いに独立で p 次元正規分布 $N(\mu_i, \Sigma)$ ($i=1, 2, \dots, k$; $j=1, 2, \dots, n$) に従う確率変数であるとする. ただし, μ_i ($i=1, 2, \dots, k$) は未知の p 次元ベクトルで, Σ は既知の $p \times p$ 正定値行列である. このとき, 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ に対する対立仮説 $\bigcup_{i=1}^k H_i$ (各 H_i は, 第 i 番目の μ_i だけが他とは異なるという仮説, すなわち, $H_i: \mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \dots = \mu_k = \mu_i - \delta = \mu_{i+1} = \dots = \mu_k$ である.)

の検定は, slippage test と呼ばれる. この検定を Robbins (1970) や Lai (1976) のように sequential に行うのが目的である.

【2】 Sequential slippage test. $X_{(n)} = (X_{11}, \dots, X_{1n}, X_{21}, \dots, X_{2n}, \dots, X_{kn})'$ を $kn \times p$ の確率行列, μ は未知の p 次元ベクトル, Σ は既知の $p \times p$ 正定値行列とする. 【1】で述べた slippage test は, 次のモデル

$$(4) \quad X_{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \delta' \\ & n \end{pmatrix} \mu' + \begin{pmatrix} 1 & \delta' \\ & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N_{kn \times p}(0, I_{kn} \otimes \Sigma),$$

において, $k+1$ 個の仮説, すなわち,

$$(5) \quad \begin{aligned} H_0: \delta_j &= 0 \quad \text{for } \forall j=1, 2, \dots, k, \\ H_i: \delta_j &\neq 0 \quad \text{if } j=i, \quad \delta_j = 0 \quad \text{if } j \neq i, \quad (i=1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

を持つ多重決定問題として定式化される. この問題は, $X_{(n)} \rightarrow X_{(n)} + 1_{kn} a' \quad (a \in \mathbb{R}^p)$ なる変換群 G のもとで不変である (Hara (1988)). 今, 各 δ_i に対する信頼水準 $1 - \alpha/k$ の G 不変信頼列

$\{R_n^i(X_{(n)})\}_{n \geq m} \quad (i=1, 2, \dots, k)$ が構成でき, かつ, それらがそれぞれ consistent かつ degenerate in the limit であるとする. このとき,

$$(6) \quad N = \inf \{n \geq m \mid 0 \notin R_n^i(X_{(n)}) \text{ for } \exists i=1, 2, \dots, k\}$$

とおけば, N 回目に帰無仮説 H_0 を棄却して k 個の対立仮説の中の H_i を選ぶという sequential slippage test は size α である. すなわち,

$$(7) \quad P_{\mu, H_0} \{H_0 \text{ を棄却する} \} \leq \alpha \quad \text{for } \forall \mu.$$

また, 正しい対立仮説を選ぶ確率は一様に1である. すなわち,

$$(8) \quad P_{\mu, \delta_i, H_i} \{ H_i \text{ を選ぶ } \} = 1 \quad \text{for } \forall \mu, \forall \delta_i \neq 0, \forall i.$$

【3】Invariant confidence sequences for δ_i . 簡単のため $\Sigma = I_p$ とおく. Robbins' inequality (1970) より,

$$(9) \quad P_{\mu, \delta_i, H_i} \{ \|\delta_i - k(\bar{X}_i - \bar{X})/(k-1)\|^2 \geq k(a+p \log(n/m))/((k-1)n) \text{ for } \exists n \geq m \} \\ \leq 1 - F(a) + 2af(a)/p \quad \text{for } \forall \mu, \forall \delta_i \neq 0, \forall i.$$

ただし, F と f は, それぞれ自由度 p の χ^2 -分布の分布関数と密度関数である. (9)式の右辺が α/k になるように a の値を定めれば,

$$(10) \quad R_n^i(X_{(n)}) = \{ \delta \in \mathbb{R}^p \mid \|\delta - k(\bar{X}_i - \bar{X})/(k-1)\|^2 < k(a+p \log(n/m))/((k-1)n) \}, \quad (n \geq m)$$

が, ずれ δ_i に対する信頼水準 $1 - \alpha/k$ のG不変信頼列である. これは consistent かつ degenerate in the limit である.

【References】[1] Hara, T. (1986). Confidence sequences for regression coefficients in a multivariate linear model, Memo. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40, 57-64.

[2] Hara, T. (1988). Detection of multivariate outliers with location slippage or scale inflation in left orthogonally invariant or elliptically contoured distributions, Ann. Inst. Statist. Math., 40, 395-406.

[3] Lai, T.L. (1976). On confidence sequences, Ann. Statist., 4, 265-280.

[4] Robbins, H. (1970). Statistical methods related to the law of the iterated logarithm, Ann. Math. Statist., 41, 1397-1409.

- [5] Sinha, B.K. and Sarkar, S.K. (1984). Invariant confidence sequences for some parameters in a multivariate linear regression model, Ann. Statist., 12, 301-310.